# 9. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть некоторая случайная величина *Х* подвергается детерминированному преобразованию ϕ, в результате которого получается величина У. Рассмотрим задачу определения числовых характеристик и закона распределения получаемой в результате преобразования случайной величины *У.*

## 9.1. Числовые характеристики функции случайного аргумента.

Рассмотрим случайную величину *Y*, зависящую функционально от случайной величины *X* с известным законом распределения *F*(*x*): *Y*=φ(*X*).

Если *Х* – дискретная случайная величина и известен ее ряд распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Xi* | *x1* | *x2* | *…* | *xn* |
| *pi* | *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

Определяем вероятности появления различных значений случайной величины *У*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *φ(X)i* | *φ(x1)* | *φ(x2)* | *…* | *φ(xn)* |
| *pi* | *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

Тогда математическое ожидание случайной величины *Y* определяется так:

 (9.1)

Если случайная величина *X* непрерывна и имеет плотность распределения *f(x),* то заменяя в формуле (9.1) вероятности *pi* элементом вероятности *f(x)dx*, а сумму – интегралом, получаем:

 . (9.2)

Для смешанной случайной величины выражение для математического ожидания преобразуется к виду:

 (9.3)

Соотношения (9.1), (9.2) и (9.3) – *общее понятие математического ожидания*, позволяющее вычислить математическое ожидание для неслучайных функций случайного аргумента. Например, дисперсия случайной величины Y=φ(x) определяется так:



Величину *M*[*φ*(*x*)] рассчитываем в соответствии с (9.1)-(9.3). Для определения математического ожидания квадрата *φ*(*х*) воспользуемся следующими соотношениями:

. (9.4)

Таким образом, для нахождения числовых характеристик функции *Y*=*φ*(*x*) достаточно знать закон распределения ее аргумента.

## 9.2. Закон распределения функции дискретного случайного аргумента

Для дискретной случайной величины *Y*=*φ*(*х*) определяем вероятности появления различных значений случайной величины:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *φ(X)i* | *φ(x1)* | *φ(x2)* | *…* | *φ(xn)* |
| *pi* | *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

Преобразуем полученную таблицу в ряд распределения случайной величины *Y*. Для этого расположим значения *Y* в порядке возрастания, а для определения вероятностей p{*Y*=*yi*} будем руководствоваться следующими правилами:

* если различным возможным значениям аргумента *Х* соответствуют различные возможные значения *Y*, то *P*{*Y*=*φ*(*xi*)}=*pi*;
* если различным возможным значениям случайной величины *Х* соответствуют значения *Y*, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений СВ *Y*.

Полученный таким образом ряд является рядом распределения случайной величины *Y*.

## 9.3. Закон распределения функции непрерывного случайного аргумента

Пусть Х – непрерывная случайная величина с известной плотностью вероятности. Алгоритм определения закона распределения СВ Y зависит от вида функции Y=ϕ(х).

* + 1. **Р**ассмотрим случай ***монотонного возрастания функции Y=φ(x)*** на интервале [a,b) определения случайной величины Х (рис. 9.1).

Определим функцию распределения величины У:



Чтобы выполнилось условие , необходимо и достаточно, чтобы случайная величина *Х* попала на участок оси абсцисс от *а* до *х=ψ(х)*, где *ψ(х)* – функция, обратная функции *ϕ*(*x*).



Функция распределения случайной величины *Y* имеет вид:



Дифференцируя интеграл по переменной *у*, входящей в верхний предел, получим:

.

* + 1. Рассмотрим случай, когда ***y=φ(х) монотонно убывающая функция*** на интервале [a,b) определения случайной величины Х (рис. 9.2).

Функция распределения случайной величины *Y* определиться так:



Функция распределения СВ *Y=φ(х)* для СВ *X*, распределен­ной в интервале [*a*,b], равна:



Плотность вероятностей для любого монотонного случая принимает вид:

 (9.5)

* + 1. Рассмотрим случай когда ***функция y=φ(x)*** на участке [*a*,*b*) возможных значений случайной величины Х ***не монотонна*** (рис. 9.3).

Число значений обратной функции ψ(y) зависит от того, какое значение Y выбрано. Событие Y<y равносильно попаданию случайной величины X в один из непересекающихся отрезков, отмеченных жирной линией на рис.9.3, где соответствующая часть кривой y-φ(X) лежит ниже прямой у. Попадания точки Х в эти отрезки – события несовместные; по правилу сложения вероятностей

(9.6)

Плотность вероятностей случайной величины *Y* равна

 (9.7)

где: k – интервалов монотонности функции φ(x);

ymin , ymax – соответственно минимальное и максимальное значение случайной величины Y;

ymini , ymaxi – соответственно минимальное и максимальное значение случайной величины Y на i-ом интервале монотонности.

*Пример* 9.1. Определить плотность вероятности величины *Y* = *X*2, если *X* - случайная величина, равномерно распределенная на интервале (-1, 2).

*Решение*. В зависимости от числа *k* обратных функций выделим следующие интервалы для *Y* (см. рис. 3.1):

(-, 0) *k* = 0,

(0, 1) *k* = 2,

(1, 4) *k* = 1,

(4, + ) *k* = 0.



Рис. 9.4

Так как на интервалах (-, 0) и (4, +) обратная функция не существует, то *g*(*y*)=0.

В интервале (0,1) две обратных функции: 1(*y*) = + и 2(*y*) = -. По формуле (3.1) получим



В интервале (1,4) одна обратная функция 1(y) = +, следовательно

